№14-дәріс

Туынды көмегімен функцияны зерттеп, графигін салу схемасы.

Функцияның графигін зерттеудің жалпы жоспары

1. Анықталу облысын және мәндерінің облысын табу.
2. Егер бар болса, үзіліс нүктелерін табу.
3. $f(x)$ функциясының графигінің координат өстерімен қиылысу нүктелерін табу.
4. Функцияның жұптығын, тақтығын және периодтылығын зерттеу.
5. Өсу, кему аралықтарын және экстремумдарын табу.
6. Функцияның ойыс және дөңес болу аралықтарын, иілу нүктелерін табу.
7. Қисықтың асимптоталарын табу.
8. Зерттеудің нәтижесінде функцияның графигін салу .

Мысал1. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ функциясын зерттеп, графигін салу.

1. Анықталу облысы: $x = 1$ нүктесінен басқа барлақ нақты сандар жиыны.

2. $x = 1$ нүктесі функцияның үзіліс нүктесі:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{1-0-1}\right) = -\left(\frac{1}{0}\right) = -\left(\frac{1}{0}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \left(\frac{1}{1+0-1}\right) = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty$$

$x = 1$ нүктесі екінші түрдегі үзіліс нүктесі.

3. Егер $x = 0$ болса, онда $y = 0$.

$(-\infty;1)$ аралығында $y < 0$, ал $(1;\infty)$ аралығында $y > 0$.

4. $f(x) \neq f(-x)$, $f(x) \neq -f(x)$, $f(x+T) \neq f(x)$ болғандықтан, $f(x)$ функциясы жұп та емес, тақ та емес және периодты емес.

5. Өсу, кему аралықтарын және экстремум нүктелерін табайық.

$$y' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

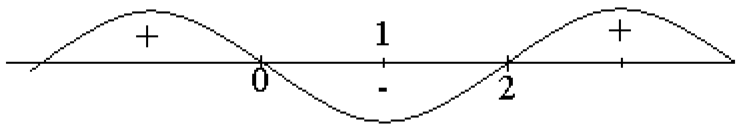
Алдымен, кризистік нүктені табамыз:

а) $y' = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2$

б) $x = 1$ нүктесінде y' анықталмаған, ендеше $x_3 = 1$

Сонымен, кризистік нүктелер $x_1 = 0, \quad x_2 = 2, x_3 = 1$.

y'-тің таңбасы $x^2 - 2x = x(x-2)$ таңбасымен бірдей, яғни, $x^2 - 2x \geq 0$ теңсіздігін шешу жеткілікті. Бұл квадрат теңдеудің түбірлері 0 және 2, ал x^2-тің коэффиценті оң сан. Сонымен,



а) $y' < 0$ болады, $(0;2)$ аралығында, яғни, $(0;2)$ аралығында $f(x)$ кемиді;
б) $y' > 0$ болады $(-\infty;0)$ және $(2;\infty)$ болса, яғни, $(-\infty;0)$ және $(2;\infty)$ аралықтарында $f(x)$ функциясы өседі;
в) $x_1 = 0$ нүктесінен өткенде y' таңбасын « +»-тен «-»-ке өзгертеді, $x_2 = 2$ нүктесінен өткенде таңбасын «-»-тен « +»-ке өзгертеді, ал $x_3 = 1$ нүктесінен өткенде y' таңбасын өзгертпейді.
Сонымен, $x_1 = 0$ нүктесі $\max y(x) = y(0) = 0$, $x_2 = 2$ нүктесі
$\min y(x) = y(2) = 4$
$x_3 = 1$ нүктесінде экстремум жоқ.

6. Функцияның қисығының ойыс, дөңестігін және иілу нүктелерін табалық.

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

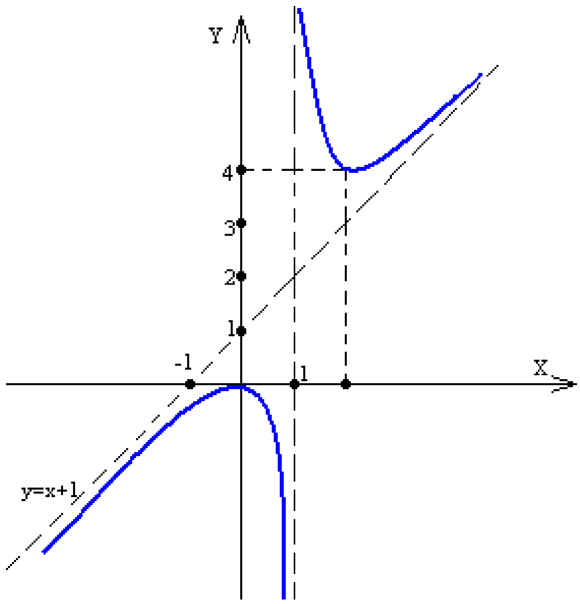
y'' -тің таңбасы (х-1)-дің таңбасымен бірдей. Ендеше,
а) $y'' < 0$ болады, $(-\infty;1)$ аралығында, яғни, $(-\infty;1)$ аралығында $f(x)$ функциясының қисығы - дөңес;
б) $y'' > 0$ болады, $(1;\infty)$ аралығында, яғни, $(1;\infty)$ аралығында $f(x)$ функциясының қисығы ойыс;
в) х=1 нүктесінде y'' анықталмаған және осы х=1 нүктесінде y'' таңбасын « –» -тан « +»-қа өзгертеді. Ендеше, $x = 1$ иілу нүктесі.

7. Асимптоталарды табалық.
а) $x = 1$ - вертикаль асимптота.
б) $y = kx + b$ -көлбеу асимптота.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1 \ ,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Сонымен, $y = x + 1$ - көлбеу асимптота.
8. Функцияның графигін тұрғызалық.


Y
X
4
3
2
1
-1
1
y=x+1